

### 3.2. Ortogonalni okviri

Ravni linijski nosači kod kojih svi štapovi leže u jednom od dva međusobno ortogonalna pravca nazivaju se ortogonalni okviri. Ove vrste nosača su, veoma često, konstrukcijski sistemi zgrada.

Prilikom proračuna uticaja u ortogonalnom okviru uvodimo dva pojednostavljenja.

Kod ortogonalnih okvira aksijalne deformacije u odnosu na deformacije koje potiču od savijanja su neznatne i mogu se zanemariti a da nemaju značajan uticaj na tačnost rješenja. Zanemarivanjem aksijalnih deformacija, odnosno, zanemarenjem uticaja normalnih sila na deformaciju štapa, broj stepeni slobode se smanjuje, kao i u približnoj metodi deformacija. U tom slučaju osnovne nepoznate u čvorovima štapa su pomjeranja upravna na osu štapa i obrtanja. Odnosno, svaki čvor ima dva stepena slobode pomjeranja, dok štap ima četiri stepena slobode pomjeranja,  $2 \times 2 = 4$ , slika 42. Navedeno predstavlja prvo pojednostavljenje proračuna ortogonalnih okvira.



Slika 42.

Ukoliko se zanemari uticaj normalnih sila na deformaciju nosača, veza između statički i deformacijskih veličina, s obzirom na to da se može uspostaviti samo veza između momenata i deformacionih uglova na krajevima štapa, ima sljedeći oblik (izvođenje preko bazne matrice krutosti):

$$S = \begin{bmatrix} M_i \\ M_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{22}^0 & k_{23}^0 \\ k_{32}^0 & k_{33}^0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tau_i \\ \tau_k \end{bmatrix} = \frac{1}{\alpha_{ik}\alpha_{ki} - \beta_{ik}^2} \begin{bmatrix} \alpha_{ik} & \beta_{ik} \\ \beta_{ik} & \alpha_{ki} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tau_i \\ \tau_k \end{bmatrix} \quad (106)$$

Veza između generalisanih sila na krajevima i osnovnih statičkih veličina dobija sljedeći oblik:

$$R = \begin{bmatrix} T_i \\ M_i \\ T_k \\ M_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{l} & \frac{1}{l} \\ 1 & 0 \\ -\frac{1}{l} & -\frac{1}{l} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_i \\ M_k \end{bmatrix} = c^T S \quad (107)$$

Veza između osnovnih deformacijskih veličina i generalisanih pomjeranja na krajevima štapa je u slučaju ortogonalnih štapova data sa:

$$\begin{bmatrix} \tau_i \\ \tau_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{l} & 1 & -\frac{1}{l} & 0 \\ \frac{1}{l} & 0 & -\frac{1}{l} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_i \\ \varphi_i \\ v_k \\ \varphi_k \end{bmatrix} = cq \quad (108)$$

Na osnovu izraza za matricu krutosti (43), vodeći računa o relacijama (107) i (108) dobija se:

$$k = c^T k_0 c = \begin{bmatrix} \frac{1}{l} & \frac{1}{l} \\ \frac{1}{l} & 0 \\ -\frac{1}{l} & -\frac{1}{l} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{ik} & b_{ik} \\ b_{ki} & a_{ki} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{l} & 1 & -\frac{1}{l} & 0 \\ \frac{1}{l} & 0 & -\frac{1}{l} & 1 \end{bmatrix}$$

Slijedi,

$$k = \begin{bmatrix} \frac{c_{ik} + c_{ki}}{l^2} & \frac{c_{ik}}{l} & -\frac{c_{ik} + c_{ki}}{l^2} & \frac{c_{ki}}{l} \\ \frac{c_{ik}}{l} & a_{ik} & -\frac{c_{ik}}{l} & b_{ik} \\ -\frac{c_{ik} + c_{ki}}{l^2} & -\frac{c_{ik}}{l} & \frac{c_{ik} + c_{ki}}{l^2} & -\frac{c_{ki}}{l} \\ \frac{c_{ki}}{l} & b_{ik} & -\frac{c_{ki}}{l} & a_{ki} \end{bmatrix} \quad (109)$$

gdje su:

$$\begin{aligned} a_{ik} &= \frac{\alpha_{ki}}{\Delta} & a_{ik} &= \frac{\alpha_{ik}}{\Delta} & b_{ik} &= \frac{\beta_{ik}}{\Delta} = \frac{\beta_{ki}}{\Delta} & \Delta &= \alpha_{ik}\alpha_{ki} - \beta_{ik}^2 & (110) \\ c_{ik} &= a_{ik} + b_{ik} & c_{ki} &= a_{ki} + b_{ik} \end{aligned}$$

Matrica krutosti data izrazom (109) predstavlja specijalan slučaj matrice krutosti ravnog štapa i može se dobiti redukcijom matrice krutosti koja je data izrazom (44) ako se u njoj izbrišu vrste i kolone koje odgovaraju generalisanim pomjeranjima (silama) u pravcu ose štapa (prva i četvrta vrsta i kolona).

Za slučaj štapa konstantnog poprečnog presjeka  $EI = \text{const}$ , matrica krutosti dobija sljedeći oblik:

$$k = \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} 12 & 6l & -12 & 6l \\ 6l & 4l^2 & -6l & 2l^2 \\ -12 & -6l & 12 & -6l \\ 6l & 2l^2 & -6l & 4l^2 \end{bmatrix} \quad (111)$$

Istim postupkom, polazeći od matrice krutosti (50), brisanjem prve i četvrte vrste i kolone, dobija se matrica krutosti štapa i-g:

$$k_g = \begin{bmatrix} \frac{d_{ig}}{l^2} & \frac{d_{ig}}{l} & -\frac{d_{ig}}{l^2} \\ \frac{d_{ig}}{l} & d_{ig} & -\frac{d_{ig}}{l^2} \\ -\frac{d_{ig}}{l^2} & -\frac{d_{ig}}{l^2} & \frac{d_{ig}}{l^2} \end{bmatrix} \quad (112)$$

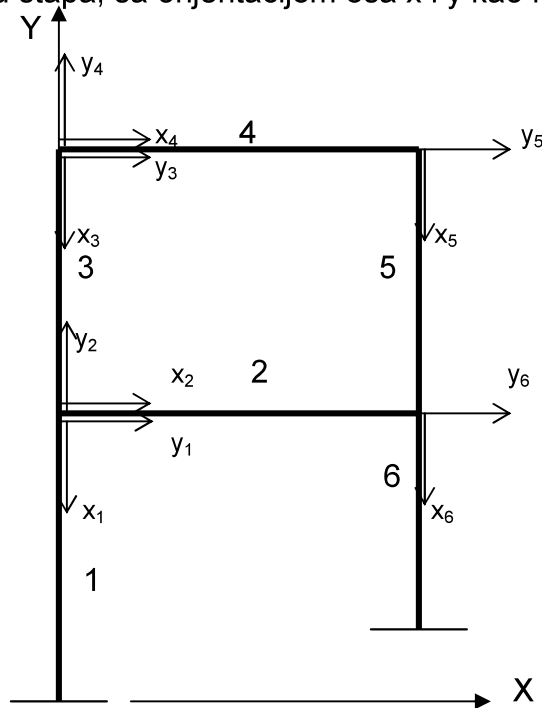
Za slučaj štapa konstantnog poprečnog presjeka,  $EI = \text{const}$ , izraz (112) postaje:

$$k_g = \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} 3 & 3l & -3 \\ 3l & 3l^2 & -3l \\ -3 & -3l & 3 \end{bmatrix} \quad (113)$$

Drugo pojednostavljenje odnosi se na transformaciju iz lokalnog u globalni koordinatni sistem. S obzirom da su svi štapovi ortogonalnog okvira postavljeni tako da su paralelni sa dva ortogonalna pravca, ovi pravci se mogu izabrati za pravce osa referentnog/globalnog koordinatnog sistema.

Pogodnim izborom lokalnog koordinatnog sistema moguće je izbeći proces transformacije matrica i vektora iz lokalnog u globalni koordinatni sistem. Upravo zbog toga lokalni koordinatni sistem štapova treba birati tako da se orijentacija osa lokalnog sistema poklapa sa orijentacijom osa globalnog koordinatnog sistema, slika 43.

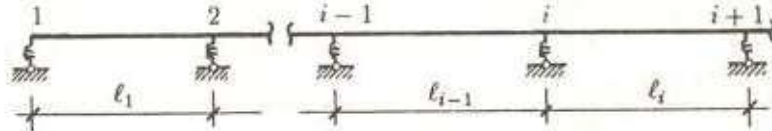
Štapovi ortogonalnog okvira su horizontalni ili vertikalni. Ukoliko se za horizontalne štapove lokalni koordinatni sistem postavi u lijevom čvoru štapa tada se osa  $x$  poklapa sa osom  $X$ , a osa  $y$  se poklapa sa osom  $Y$ , štapovi 2 i 4 na slici 42. U slučaju vertikalnih štapova, da bi se obezbijedila ista orijentacija osa  $x$  i  $y$  sa osama  $X$  i  $Y$ , potrebno je da se koordinatni početak lokalnog koordinatnog sistema postavi u čvoru na gornjem kraju štapa, sa orijentacijom osa  $x$  i  $y$  kao na slici 43, štapovi 1, 3, 5 i 6.



Slika 43.

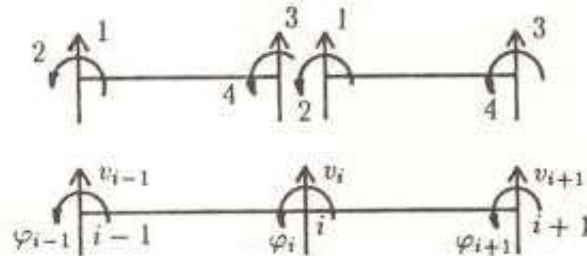
### 3.3. Kontinualni nosači

Nosač koji se sastoji od jednog štapa koji je oslonjen na više od tri oslonaca naziva se kontinualan nosač, slika 44, pri čemu je jedan od oslonaca nepokretan a svi ostali su pokretni i dozvoljavaju pomjeranje oslonjene tačke u pravcu ose štapa. Kontinualni nosači se mogu shvatiti kao specijalan slučaj ortogonalnih okvira, ukoliko se pokretni oslonci zamijene vertikalnim štapovima ili elastičnim oprugama koje imaju samo aksijalnu krutost.



Slika 44.

Na slici 44 prikazan je kontinualan nosač sa konačno mnogo polja gdje su na mjestima oslanjanja postavljene opruge, krutosti  $C_i$ ,  $i=1,2,\dots,n$ , gdje je  $n$  broj oslonaca. Šema pomjeranja sa oznakama kao za ortogonalne okvire data je na slici 45. Štap kontinualnog nosača ima četiri stepena slobode, po dva stepena slobode na svakom kraju.



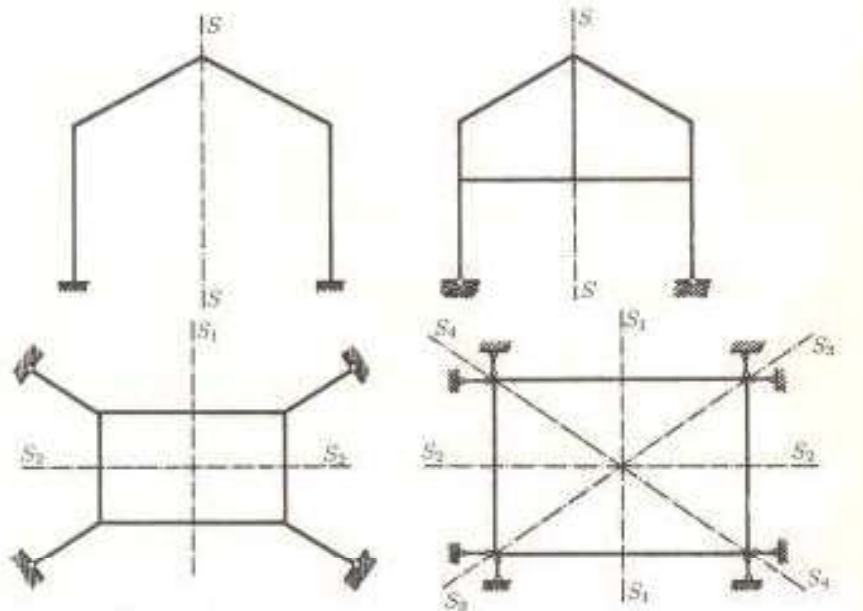
Slika 45.

Matrica krutosti štapa konstantnog poprečnog presjeka ( $EI=\text{const}$ ) ista je kao u slučaju ortogonalnih okvira (111), gdje je  $i$  oznaka lijevog čvora:

$$k = \frac{EI_i}{l_i^3} \begin{bmatrix} 12 & 6l_i & -12 & 6l_i \\ 6l_i & 4l_i^2 & -6l_i & 2l_i^2 \\ -12 & -6l_i & 12 & -6l_i \\ 6l_i & 2l_i^2 & -6l_i & 4l_i^2 \end{bmatrix} \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (113)$$

Kada se u obzir uzmu krutosti oslonačkih opruga na ranije definisan način definiše se matrica krutosti sistema:





Slika 46.

### 3.4.1. Izbor generalisanih pomjeranja

Generalisana pomjeranja u čvorovima simetričnih nosača možemo razdvojiti na simetrična i antisimetrična. S obzirom na simetriju nosača za generalisana pomjeranja u čvorovima se mogu usvojiti i parovi pomjeranja  $r_i$ ,  $i=1,2,3,4$  od kojih  $r_1$  i  $r_2$  odgovaraju simetričnoj, a  $r_3$  i  $r_4$  antisimetričnoj deformaciji, slika 47.

Sa slike 47 je očigledno da se generalisana pomjeranja čvorova  $q_i$  mogu odrediti na sljedeći način:

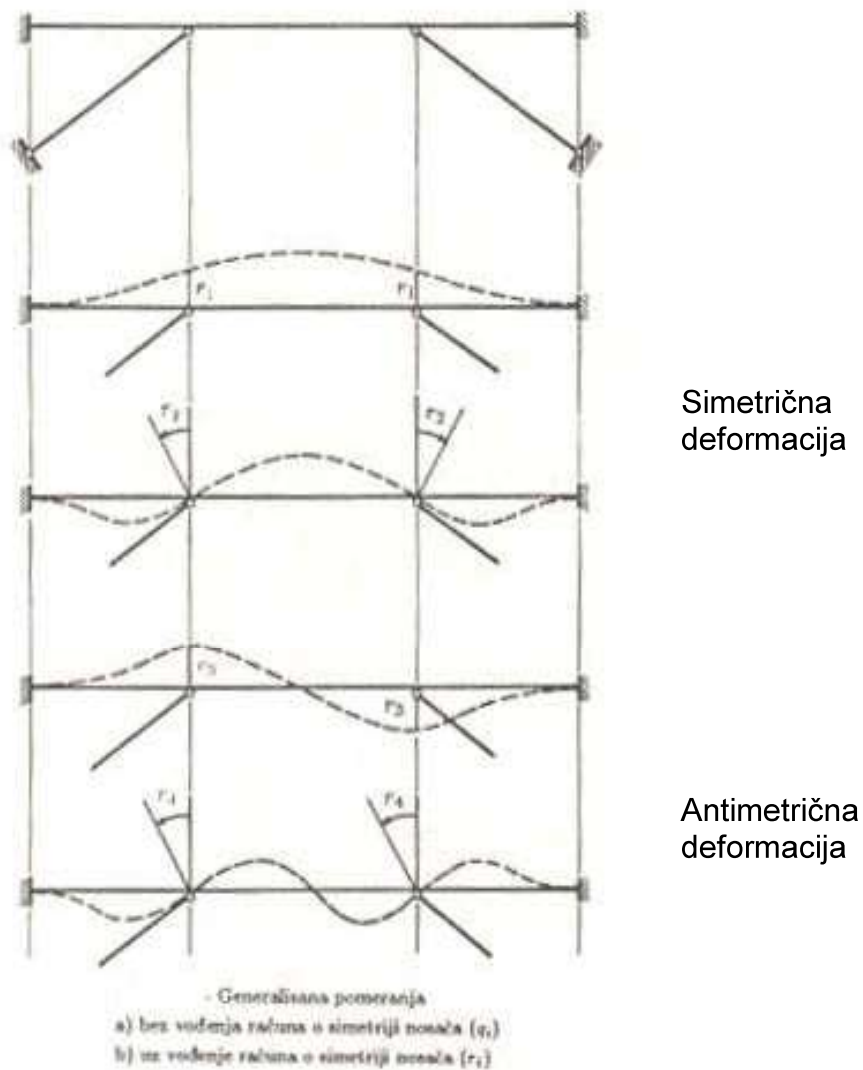
$$\begin{aligned} q_1 &= r_1 + r_3 \\ q_2 &= r_2 + r_4 \\ q_3 &= r_1 - r_3 \\ q_4 &= -r_2 + r_4 \end{aligned}$$

Skraćeni matični oblik je:

$$q^* = \hat{T} r^* \quad (114)$$

gdje su:

$$q^* = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{bmatrix} \quad r^* = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ r_4 \end{bmatrix} \quad \hat{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (115)$$



Slika 47.

Izraz (114) definiše transformaciju vektora generalisanih pomjeranja  $q^*$  u vektor generalisanih pomjeranja  $r^*$ . Ako se za nepoznate usvoje generalisana pomjeranja  $r^*$  potrebno je izvršiti transformaciju matrice krutosti i vektora ekvivalentnog opterećenja sistema. Zakon transformacije matrice i vektora dat je ranije izrazima (84a,b) i (86b). Kada se promijeni matrica transformacije iz navedenih izraza se dobija:

$$\begin{aligned}
 k_r^* &= \hat{T}^T k_q^* \hat{T} \\
 Q_r^* &= \hat{T}^T Q_q^*
 \end{aligned}
 \tag{116}$$

gdje su:

- $k_q^*$ ,  $Q_q^*$  matrica krutosti, vektor ekvivalentnog opterećenja koji odgovaraju generalisanim pomjeranjima  $q^*$ ,

- $k_r^*$ ,  $Q_r^*$  matrica krutosti, vektor ekvivalentnog opterećenja koji odgovaraju generalisanim pomjeranjima  $r^*$ .

Sve veličine su definisane u globalnom koordinatnom sistemu.

Iz jednakosti radova sistema pri generalisanim pomjeranjima  $q^*$  i  $r^*$  slijedi:

$$q_r^{*T} R_q^* = r^{*T} R_r^* \quad (117)$$

gdje su:

- $R_q^*$  i  $R_r^*$  vektori generalisanih sila koji odgovaraju generalisanim pomjeranjima  $q^*$  i  $r^*$ .

Kada se u (117) ubace sljedeće veze:

$$R_q^* = k_q^* q^*$$

$$R_r^* = k_r^* r^*$$

vodeći računa o jednakosti strana, dobija se izraz (116) kojim se definiše transformacija matrice krutosti.

Transformisana matrica  $k_r^*$  je kvazidijagonalna matrica koja se sastoji od dva dijagonalna bloka koja stoje uz simetrična i antimetrična generalisana pomjeranja:

$$\begin{bmatrix} k_s^* & \\ & k_a^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_s^* \\ r_a^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_s^* \\ S_a^* \end{bmatrix} \quad (118)$$

Indeks s označava simetriju a indeks a antimetriju.

Prema (118) sistemi jednačina iz kojih se određuju simetrična  $r_s^*$  i antimetrična  $r_a^*$  generalisana pomjeranja čvorova su:

$$\begin{aligned} k_s^* r_s^* &= S_s^* \\ k_a^* r_a^* &= S_a^* \end{aligned} \quad (119)$$

Kada se odrede komponente vektora pomjeranja  $r^*$  mogu se odrediti i komponente pomjeranja vektora  $q^*$ . Nakon toga se određuju sile u štapovima sistema istim postupkom koji je detaljno izložen za ravne nosače.

### 3.4.2. Konturni uslovi u osi simetrije

Problem statičko-deformacijske analize simetričnih nosača razdvaja se na dvije međusobno nezavisne analize:

- 1) Analizu usled dejstva simetričnog opterećenja
- 2) Analizu usled dejstva antimetričnog opterećenja.

Ovaj postupak, i ako je jednostavan, nije pogodan za nosače sa velikim brojem štapova i čvorova, zbog toga što je tada neophodno formirati matricu transformacije



$\ddot{T}$ , koja je visokog reda, a potom izvršiti matricno množenje (116). Zbog toga je pogodnije da se razmatra samo jedna polovina simetričnog nosača. S obzirom na to potrebno je definisati konturne uslove u osi simetrije duž koje se nosač razdvaja na dva jednaka dijela. Konturni uslovi u osi simetrije se definišu posebno za slučaj simetričnih uticaja usled kojih nastaju simetrična deformacija, a posebno za slučaj antimetričnih spoljašnjih uticaja usled kojih nastaje antimetrična deformacija nosača.

Razlikujemo tri tipa simetričnih nosača:

- nosač kod koga osa simetrije prolazi kroz čvor,
- nosač kod koga osa simetrije siječe štapove nosača,
- nosač sa štapovima u osi simetrije.

### 1) Simetrični nosač kod koga osa simetrije prolazi kroz čvor

Na slici 48 prikazan je simetričan nosač sa osom simetrije koja prolazi kroz čvor. Opterećenje koje djeluje na nosač razdvojeno je na dva opterećenja, simetrično i antimetrično opterećenje, slika 48b.

Za simetrično opterećenje iz uslova ravnoteže, slika 48c, slijedi:

$$\begin{aligned} H &= H \\ V + V' &= R_v \\ M &= M' \end{aligned} \quad (120)$$

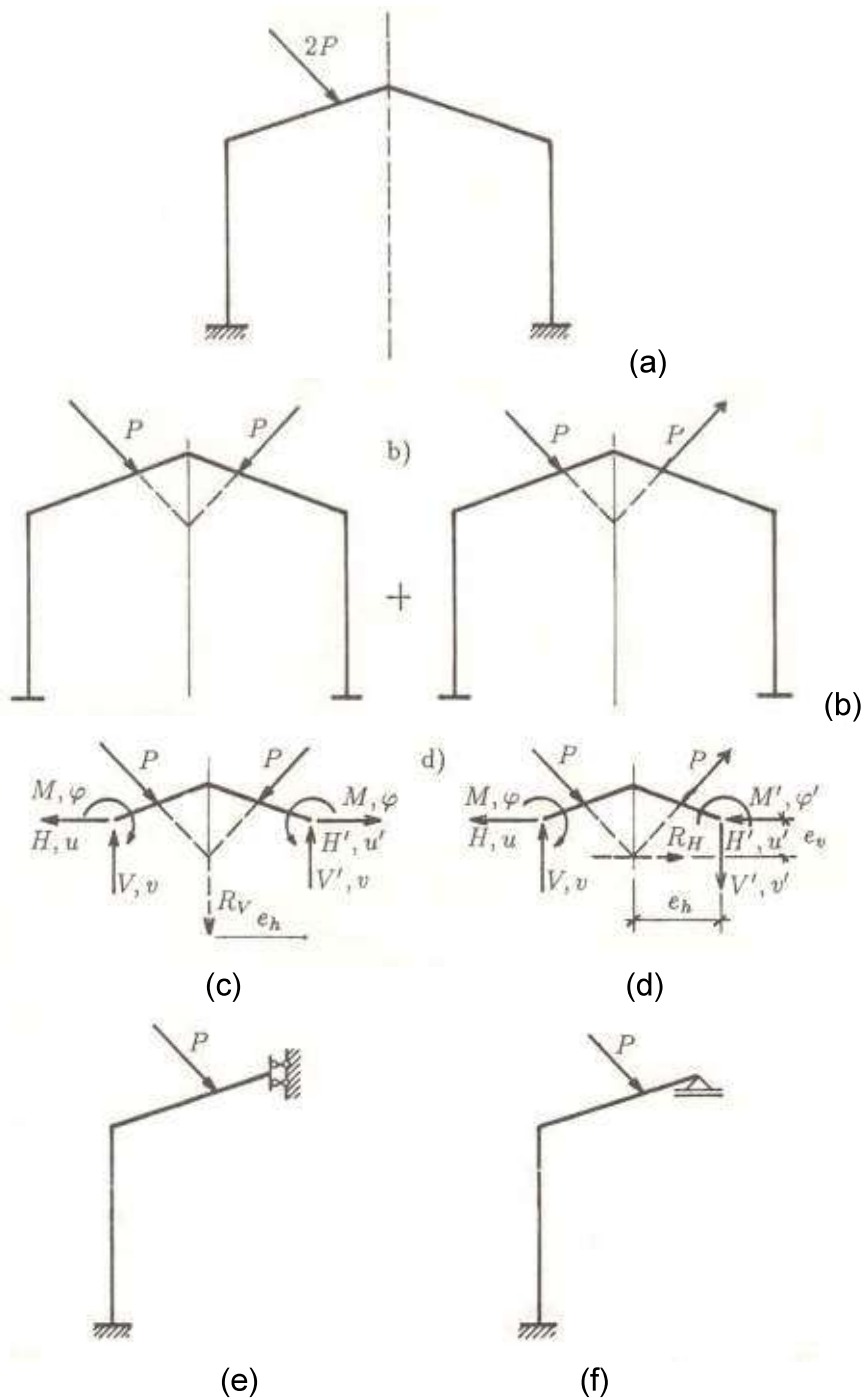
U simetričnom nosaču usled simetričnog opterećenja komponenta unutrašnjih sila u pravcu ose simetrije je statički određena veličina, i jednaka je polovini rezultante spoljašnjih sila na izdvojenom dijelu nosača koji sadrži čvor s. Iz drugog uslova ravnoteže (120) slijedi da je sila  $V$ , u čvoru koji se nalazi u osi simetrije, jednaka nuli. Pri simetričnom opterećenju, poprečni presjek u osi simetrije se ne obrće a može da se pomjera samo u pravcu ose simetrije. Slijedi da u osi simetrije simetričnog nosača koji je simetrično opterećen važe sljedeći statičko-kinematički uslovi:

$$\begin{aligned} H \neq 0 \quad V = 0 \quad M \neq 0 \\ u = 0 \quad v \neq 0 \quad \varphi = 0 \end{aligned} \quad (121)$$

Ako se u čvorovu u osi simetrije postavi oslonac koji zadovoljavaja navedene uslove, sprečava obrtanje presjeka i pomjeranje upravno na osu simetrije, a dozvoljava pomjeranje u pravcu ose simetrije, u analizi nosača može se razmatrati samo polovina simetrično opterećenog simetričnog nosača, slika 48e.

U slučaju antimetričnog opterećenja, slika 48b, u analizi nosača može se razmatrati samo polovina nosača uz odgovarajuće konturne uslove u osi simetrije. Uslovi ravnoteže izdvojenog dijela, slika 48d, glase:

$$\begin{aligned} H + H' &= R_h \\ V &= V' \\ M + M' + (V + V')e_h &= R_h e_v \end{aligned} \quad (122)$$



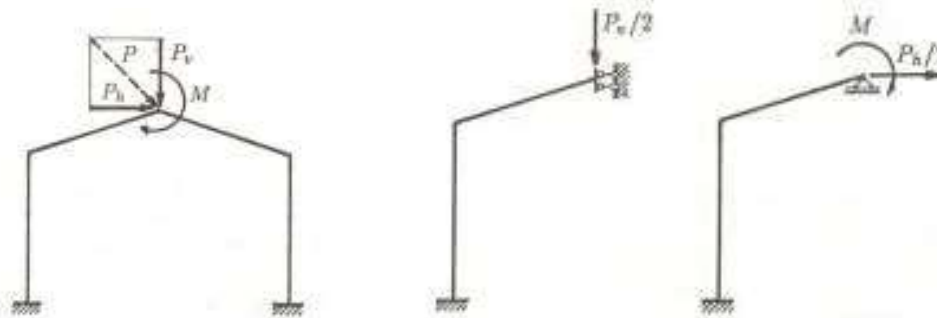
Slika 48.

U simetričnom nosaču usled antimetričnog opterećenja komponenta unutrašnjih sila upravno na osu simetrije je statički određena veličina i jednaka je polovini rezultante spoljašnjih sila,  $P_h$ , na izdvojenom dijelu nosača oko čvora  $s$ . Iz prvog i trećeg uslova ravnoteže (122) slijedi da je sila  $H$ , koja je upravna na osu simetrije i moment savijanja  $M$ , u čvoru koji se nalazi u osi simetrije, jednaki su nuli. Pri antimetričnom opterećenju, poprečni presjek u osi simetrije može da se obrće i pomjera upravno na pravac ose simetrije, i ne može da se pomjera u pravcu ose simetrije. Slijedi da u osi

simetrije za antimetrično opterećenog simetričnog nosača važe sljedeći statičko-kinematički uslovi:

$$\begin{aligned} H = 0 \quad V \neq 0 \quad M = 0 \\ u \neq 0 \quad v = 0 \quad \varphi \neq 0 \end{aligned} \quad (123)$$

Ako u čvoru s djeluju koncentrisana sila  $P$ , sa komponentama  $P_h$  i  $P_v$ , i koncentrisani momenat  $M$ , slika 49, tada s obzirom na gore navedeno, vertikalna komponenta  $P_v$  spada u simetrično, a horizontalna komponenta  $P_h$  i momenat  $M$  u antimetrično opterećenje. Pri analizi jedne polovine nosača u čvoru s treba zadati polovinu navedenih vrijednosti, slika 47.

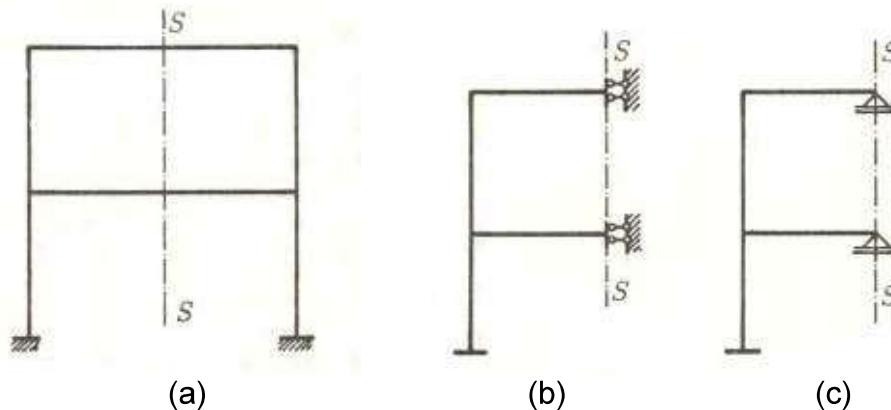


Slika 49.

Matrice krutosti i vektor ekvivalentnog opterećenja, simetrično i antimetrično opterećene polovine nosača, u ovom slučaju određuju se na način koji je ranije izložen.

## 2) Nosač kod koga osa simetrije siječe štapove nosača-polovi horizontalne štapove sistema

Na slici 50 prikazan je slučaj kada osa simetrije seče (polovi) horizontalne štapove sistema.



Slika 50.

U osi simetrije homogeni kinematički i statički uslovi za simetrično opterećenu polovinu nosača, slika 50b, su:

$$u = 0 \quad \varphi = 0 \quad T = 0$$

Za antimetrično opterećenu polovinu nosača homogeni statički i kinematički uslovi za simetrično opterećenu polovinu nosača, slika 50c, su:

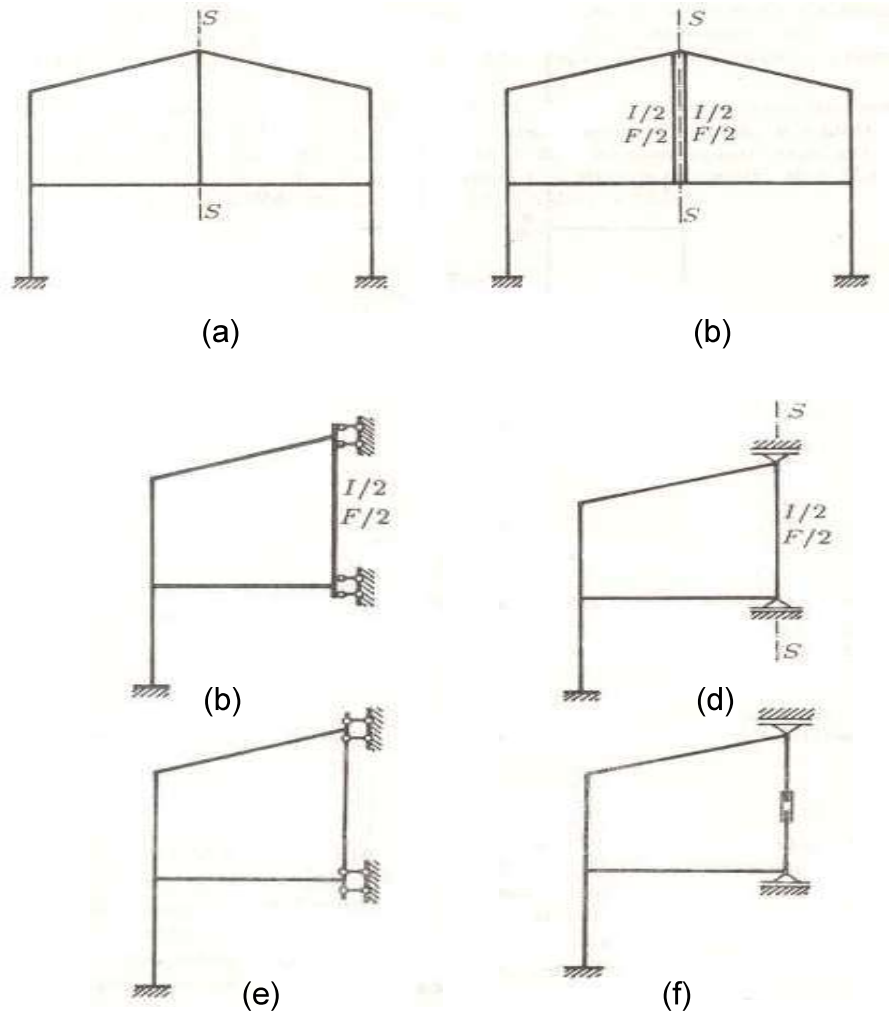
$$N = 0 \quad M = 0 \quad v = 0$$

Matrice krutosti i vektor ekvivalentnog opterećenja za antimetrično opterećenu polovinu nosača određuje se na način koji je izložen.

Kod simetrično opterećene polovine nosača definišu se štapovi tipa "s" za koje je potrebno definisati matricu krutosti i vektor ekvivalentnog opterećenja.

### 3) Nosač sa štapovima u osi simetrije

Na slici 51 prikazan je simetričan nosač sa štapom u osi simetrije. Ako se zamisli da je ovaj štap rasečen duž ose simetrije i tako zamijenjen sa dva štapa koji su postavljeni beskonačno blisko sa jedne i druge strane ose simetrije, tada se analiza nosača može svesti na slučaj bez štapa u osi simetrije.



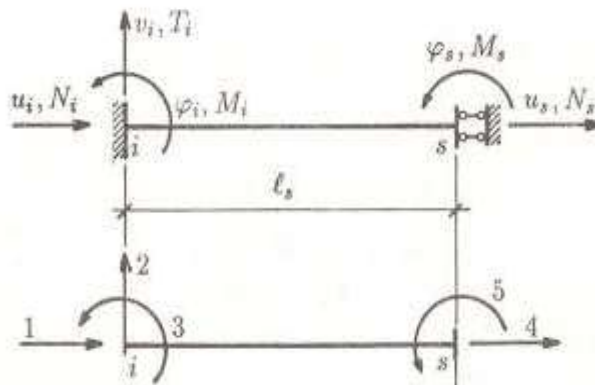
Slika 51.

Sistemi dati na slikama 51c i 51d koji odgovaraju simetričnoj i antimetričnoj deformaciji mogu da se pojednostave, slike 51e i 51f. Pri simetričnoj deformaciji, štapovi u osi simetrije mogu da prime samo opterećenje i temperaturu u pravcu ose štapa. Pošto ovi štapovi nijesu opterećeni transverzalnim opterećenjem i temperaturnom razlikom, i pošto su pomjeranja upravno na pravac ose štapa i obrtanja čvorova spriječena, slijedi da su na krajevima ovih štapova momenti i transvezalne sile imaju vrijednost nula. Iz tog razloga na krajevima štapa, u osi simetrije, simetrično opterećene polovine nosača, mogu se postaviti zglobovi, slika 51e.

Pri antimetričnoj deformaciji, štapovi u osi simetrije mogu da prime samo opterećenje upravno na osu štapa i temperaturnu razliku  $\Delta t$ . Pošto ovi štapovi nijesu opterećeni opterećenjem u pravcu ose štapa, i pošto su spriječena pomjeranja na krajevima štapa u pravcu ose štapa, slijedi da su normalne sile u ovakvim štapovima jednake nuli. U ovim štapovima se mogu pojaviti samo momenti i transvezalne sile, slika 51f.

### 3.4.3. Matrica krutosti štapa tipa „s“

Transvezalna sila, simetrično opterećene polovine nosača, u čvoru „s“ jednaka je nuli. Stoga štap tipa „s“ ima pet generalisanih sila, slika 52, tri u čvoru i, i dvije u čvoru s. Generalisanim silama odgovaraju generalisana pomjeranja kao što je prikazano na slici 52. Zaključuje se da štap tipa „s“ ima pet stepeni slobode pomjeranja, tri u čvoru i, i dva u čvoru s.



Slika 52.

Polazi se od veze generalisanih sila i generalisanih pomjeranja na krajevima štapa tipa „k“, uz uvođenje oznake s umjesto oznake k:

$$\begin{bmatrix} N_i \\ T_i \\ M_i \\ N_k \\ T_k \\ M_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & & & k_{14} & & \\ & k_{22} & k_{23} & & k_{25} & k_{26} \\ & k_{32} & k_{33} & & k_{35} & k_{36} \\ k_{41} & & & k_{44} & & \\ & k_{52} & k_{53} & & k_{55} & k_{56} \\ & k_{62} & k_{63} & & k_{65} & k_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ \varphi_i \\ u_k \\ v_k \\ \varphi_k \end{bmatrix}$$

Iz uslova  $T_s=0$  slijedi:

$$v_s = -\frac{1}{k_{55}}(k_{52}v_i + k_{53}\varphi_i + k_{56}\varphi_s)$$

Kada se ovaj izraz ubaci u vezu sila i pomejranja dobija se:

$$\begin{bmatrix} N_i \\ T_i \\ M_i \\ N_s \\ M_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & & & k_{14} & & \\ & k_{22} - \frac{k_{25}^2}{k_{55}} & k_{23} - \frac{k_{25}k_{53}}{k_{55}} & & k_{26} - \frac{k_{25}k_{56}}{k_{55}} & \\ & k_{32} - \frac{k_{25}k_{53}}{k_{55}} & k_{33} - \frac{k_{35}^2}{k_{55}} & & k_{36} - \frac{k_{35}k_{56}}{k_{55}} & \\ k_{41} & & & k_{44} & & \\ & k_{62} - \frac{k_{25}k_{56}}{k_{55}} & k_{63} - \frac{k_{35}k_{56}}{k_{55}} & & k_{66} - \frac{k_{25}^2}{k_{55}} & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ \varphi_i \\ u_s \\ \varphi_s \end{bmatrix}$$

odnosno:

$$R_s = k_s q_s$$

Pošto prema (44) važi da je:

$$\begin{aligned} k_{22} &= k_{55} = -k_{25} \\ k_{23} &= -k_{35} \\ k_{26} &= -k_{56} \end{aligned}$$

matrica krutosti štapa tipa „s“ postaje:

$$k_s = \begin{bmatrix} k_{11} & 0 & 0 & k_{14} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_{33} - \frac{k_{35}^2}{k_{55}} & 0 & k_{36} - \frac{k_{35}k_{56}}{k_{55}} \\ k_{41} & 0 & 0 & k_{44} & 0 \\ 0 & 0 & k_{63} - \frac{k_{35}k_{56}}{k_{55}} & 0 & k_{66} - \frac{k_{25}^2}{k_{55}} \end{bmatrix}$$

Koeficijenti  $k_{ij}$  određuju se kao za štap tipa „k“, dužine  $l_s$ . Za štap konstantnog poprečnog presjeka  $EI = \text{const.}$ , smjenom:

$$k_{33} = k_{66} = \frac{4EI}{l_s}$$

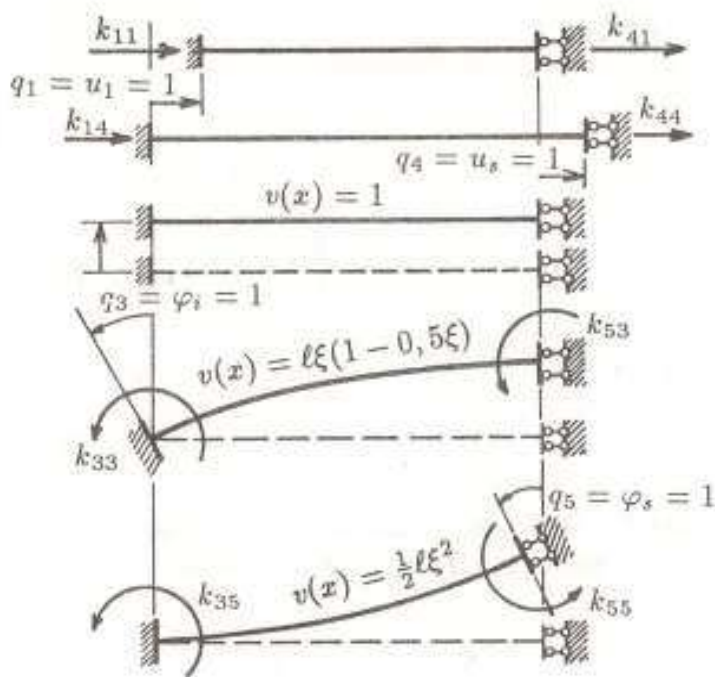
$$k_{55} = \frac{12EI}{l_s^3}$$

$$k_{35} = k_{56} = -\frac{6EI}{l_s^2}$$

matrica krutosti postaje:

$$k_s = \begin{bmatrix} \frac{EF}{l_s} & 0 & 0 & -\frac{EF}{l_s} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{EI}{l_s} & 0 & -\frac{EI}{l_s} \\ -\frac{EF}{l_s} & 0 & 0 & \frac{EF}{l_s} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{EI}{l_s} & 0 & \frac{EI}{l_s} \end{bmatrix} \quad (124)$$

Geometrijsko-statičko značenje elemenata matrice krutosti  $k_s$ , prikazano je na slici 53.

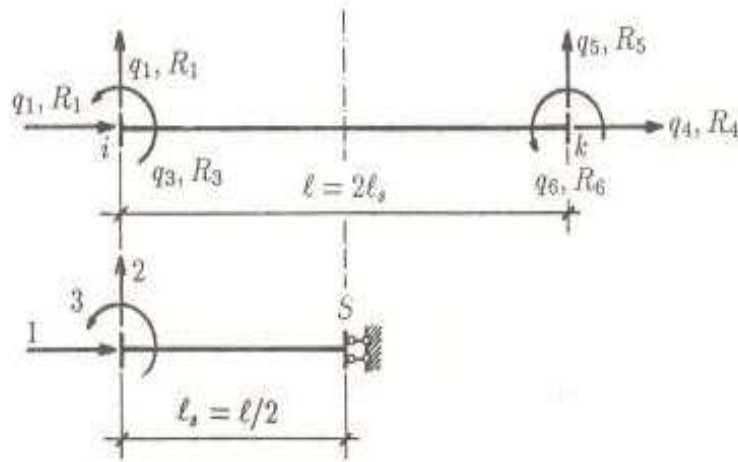


Slika 53.

Vektor ekvivalentnog opterećenja za štap s određuje se na isti način kao i za štapove tipa k, odnosno g.

Prilikom formiranja matrice krutosti i vektora ekvivalentnog opterećenja za štap tipa „s“, pored čvora i na lijevom kraju štapa uveden i čvor s na osi simetrije. U zadatom sistemu, ako se analizira cio sistem, nema potrebe za uvođenjem čvora u osi simetrije jer se u tim presjecima sile i pomjeranja mogu dobiti iz analize štapa.

Sile i pomjeranja u osi simetrije uvijek mogu da se eliminišu i izraze preko sila i pomjeranja na krajevima štapa. To znači da može da se uspostavi direktna zavisna između generalisanih sila i generalisanih pomjeranja na kraju štapa. Polazimo od štapa i-k dužine  $l=2l_s$ , koji osa simetrije polovi, slika 54.:



Slika 54.

Iz uslova simetrije slijedi:

$$\begin{aligned} q_4 &= -q_1 & R_4 &= -R_1 \\ q_5 &= -q_2 & R_5 &= R_2 \\ q_6 &= -q_3 & R_6 &= -R_3 \end{aligned} \quad (125)$$

Veze između generalisanih sila i generalisanih pomjeranja u čvoru i, uz zadovoljenje uslova (125) glase:

$$\begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} - k_{14} & 0 & 0 \\ 0 & k_{22} + k_{55} & k_{23} - k_{26} \\ 0 & k_{32} + k_{35} & k_{33} - k_{36} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix}$$

$k_{ij}$  su koeficijenti matrice krutosti štapa i-k, dužine  $l$ . Ukoliko se koristi osobina simetrije štapa i-k i relacija (33), može se napisati da važe sljedeće jednakosti:

$$\begin{aligned} k_{22} &= -k_{25} & k_{11} &= -k_{14} = k_{11}^0 \\ k_{23} &= k_{26} & k_{22} &= k_{33} = k_{22}^0 \\ k_{32} &= -k_{35} & k_{36} &= k_{23}^0 \end{aligned}$$



Veza generalisanih sila i generalisanih pomjeranja postaje:

$$\begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2k_{11}^0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_{22}^0 - k_{23}^0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix}$$

Gdje su  $k_{11}^0$ ,  $k_{22}^0$ ,  $k_{23}^0$  koeficijenti bazne matrice krutostu štapa i-k, dužine l. Za štap konstantnog poprečnog presjeka,  $EI = \text{const}$ , koeficijenti su definisani sa:

$$k_{11}^0 = \frac{EF}{l} \quad k_{22}^0 = \frac{4EI}{l} \quad k_{23}^0 = \frac{2EI}{l}$$

Matrica krutosti štapa tipa „s“ postaje:

$$k_s = \begin{bmatrix} \frac{2EF}{l} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2EI}{l} \end{bmatrix} \quad (126)$$

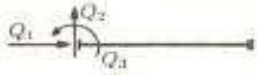
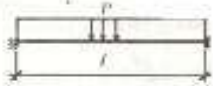

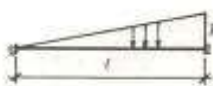
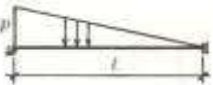
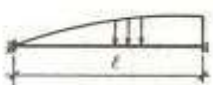
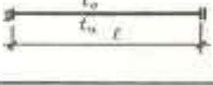

opterećenje	
	$Q_2 = -pl$ $Q_3 = -\frac{pl^2}{3}$
	$Q_2 = -P$ $Q_3 = -Pa(1 - \frac{a}{l})$
	$Q_2 = \frac{pl}{2}$ $Q_3 = -\frac{pl^2}{24}$
	$Q_2 = -\frac{pl}{2}$ $Q_3 = -\frac{pl^2}{8}$
	$Q_2 = -\frac{2pl}{3}$ $Q_3 = -\frac{2pl^2}{15}$
	$Q_1 = -\frac{\alpha pl}{2}(t_0 - t_u), Q_2 = 0$ $Q_3 = E I \alpha \frac{t_0 - t_u}{h}$
	$Q_1 = P$

Tabela 1.